Parametric Datatype-Genericity

Jeremy Gibbons
Ross Paterson
WG2.1#62, December 2006

1. Unzip is natural

- datatype-generic $\textsc{unzip}_{\mathsf{F}}$ unzipping a structure of pairs
- polymorphic — type-indexed family of functions:

$$\textsc{unzip}_{\mathsf{F},\alpha} : \mathsf{F}(\mathsf{Pair}(\alpha)) \to \mathsf{Pair}(\mathsf{F}(\alpha))$$

- naturality property, relating instances: for $f : \alpha \to \beta$,

$$\textsc{unzip}_{\mathsf{F},\beta} \cdot \mathsf{F}(\mathsf{Pair}(f)) = \mathsf{Pair}(\mathsf{F}(f)) \cdot \textsc{unzip}_{\mathsf{F},\alpha}$$

- so $\textsc{unzip}$ is a natural transformation:

$$\textsc{unzip}_{\mathsf{F}} : \mathsf{F} \circ \mathsf{Pair} \stackrel{.}{\to} \mathsf{Pair} \circ \mathsf{F}$$

2. Unzip is higher-order natural

- another level of coherence, concerning the other index:

$$\textsc{unzip}_{\mathsf{G}} \cdot \phi = \mathsf{Pair}(\phi) \cdot \textsc{unzip}_{\mathsf{F}}$$

  for $\phi : \mathsf{F} \dot{\to} \mathsf{G}$

- so $\textsc{unzip}$ is also a higher-order natural transformation:

$$\textsc{unzip} : (\circ\mathsf{Pair}) \stackrel{\cdot\cdot}{\to} (\mathsf{Pair}\circ)$$

3. Fold

- inductive datatype $\mu\mathsf{F}$ with $\textsc{in}_{\mathsf{F}} : \mathsf{F}(\mu\mathsf{F}) \to \mu\mathsf{F}$
- $\textsc{fold}_{\mathsf{F}}(f) : \mu\mathsf{F} \to \alpha$ for $f : \mathsf{F}(\alpha) \to \alpha$
- universal property

$$h = \textsc{fold}_{\mathsf{F}}(f) \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot \textsc{in}_{\mathsf{F}} = f \cdot \mathsf{F}(h)$$

- hence fusion

$$h \cdot \textsc{fold}_{\mathsf{F}}(f) = \textsc{fold}_{\mathsf{F}}(g) \quad \Leftarrow \quad h \cdot f = g \cdot \mathsf{F}(h)$$

4. Relating different instances of fold

- for $\phi : \mathsf{F} \stackrel{.}{\to} \mathsf{G}$, let

$$\mu\phi = \text{FOLD}_{\mathsf{F}}(\text{IN}_{\mathsf{G}} \cdot \phi_{\mu\mathsf{G}}) : \mu\mathsf{F} \to \mu\mathsf{G}$$

- then, by fusion, for $\phi : \mathsf{F} \stackrel{.}{\to} \mathsf{G}$,

$$\text{FOLD}_{\mathsf{F}}(f \cdot \phi) = \text{FOLD}_{\mathsf{G}}(f) \cdot \mu\phi$$

- for example,

$$ldepth = length \cdot lspine$$

5. Fold is a hont

Assume cartesian closed category $\mathbb{C}$. Fix an object $A \in |\mathbb{C}|$. Define the two hofunctors $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ from $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ to $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ as follows:

- $\mathcal{H}(\mathsf{F}) = (\mathsf{F}(A) \Rightarrow A)$;
- $\mathcal{H}(\phi) = (\,\cdot\,\phi_A) : (\mathsf{G}(A) \Rightarrow A) \to (\mathsf{F}(A) \Rightarrow A)$ for $\phi : \mathsf{F} \stackrel{.}{\to} \mathsf{G}$;
- $\mathcal{K}(\mathsf{F}) = (\mu\mathsf{F} \Rightarrow A)$;
- $\mathcal{K}(\phi) = (\,\cdot\,\mu(\phi)) : (\mu\mathsf{G} \Rightarrow A) \to (\mu\mathsf{F} \Rightarrow A)$ for $\phi : \mathsf{F} \stackrel{.}{\to} \mathsf{G}$.

Then $\textsc{fold}_{\mathsf{F}} \cdot \mathcal{H}(\phi) = \mathcal{K}(\phi) \cdot \textsc{fold}_{\mathsf{G}}$ for each $\phi : \mathsf{F} \stackrel{.}{\to} \mathsf{G}$, or diagrammatically:

$$\begin{CD}
\mathcal{H}(\mathsf{F}) @>{\mathrm{FOLD}_{\mathsf{G}}}>> \mathcal{K}(\mathsf{F}) \\
@V{\mathcal{H}(\phi)}VV @VV{\mathcal{K}(\phi)}V \\
\mathcal{H}(\mathsf{G}) @>>{\mathrm{FOLD}_{\mathsf{F}}}> \mathcal{K}(\mathsf{G})
\end{CD}$$

6. Other honts

- $\text{UNFOLD}_{\mathsf{F}}(f) : \alpha \to \nu\mathsf{F}$ for $f : \alpha \to \mathsf{F}(\alpha)$, where coinductive datatype $\nu\mathsf{F}$ with $\text{OUT}_{\mathsf{F}} : \mu\mathsf{F} \to \mathsf{F}(\mu\mathsf{F})$
- $\text{PARA}_{\mathsf{F}} : (\mathsf{F}(A \times \mu\mathsf{F}) \Rightarrow A) \to (\mu\mathsf{F} \Rightarrow A)$
- $\text{APO}_{\mathsf{F}} : (A \Rightarrow \mathsf{F}(A + \nu\mathsf{F})) \to (A \Rightarrow \nu\mathsf{F})$
- IN and OUT
- ...

7. Parametricity vs ad-hockery

- parametrization vs type inspection
- reasonability vs flexibility
- higher-order parametricity theorem?